KOŘENY POLYNOMU

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in P[x]$$

$\xi \in P$

$$f(\xi) = a_n \xi^n + a_{n-1} \xi^{n-1} + \dots + a_1 \xi + a_0 \in P$$

$\xi \in P$ se nazývá KOŘEN polynomu f, jestliže $f(\xi) = 0$. Př. $1, -1$ jsou kořeny $x^2 - 1$.

$\xi \in P$ se nazývá ASPOŇ k-NÁSOBNÝ KOŘEN polynomu $f \in P[x]$, jestliže $(x-\xi)^k \mid f$.

$\xi \in P$ se nazývá k-NÁSOBNÝ KOŘEN polynomu $f \in P[x]$, jestliže $(x-\xi)^k \mid f$, ale neplatí $(x-\xi)^{k+1} \mid f$.

Př.: $f = (x-1)^2 (x+2)$

Tvrzení $f \in P[x]$, $\xi \in P$. Následující podm. jsou ekviv.

1) ξ je kořen f.
2) $(x-\xi) \mid f$.

Důkaz.

$$f = (x-\xi) q + r$$

Základní věta algebry. Každý nekonstantní polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ má aspoň jeden kořen.

Důsledek Každý nekonstantní polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ má rozklad na lineární ireducibilní činitele.

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$$

$$f' = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1 \in \mathbb{C}[x]$$

se nazývá DERIVACE polynomu f.

Tvrzení 1) $(f+g)' = f' + g'$.

2) $(fg)' = f'g + fg'$.

3) $(f^k)' = k f^{k-1} \cdot f'$.

Tvrzení $k \geq 2$, $f \in \mathbb{C}[x]$ a $\xi \in \mathbb{C}$ je k-násobný kořen polynomu f. Pak

1) ξ je $(k-1)$-násobný kořen f'.

2) ξ je $(k-1)$-násobný kořen $D(f, f')$.

Tvrzení $f \in \mathbb{C}[x]$, $\xi \in \mathbb{C}$ jeho kořen. Potom ξ je 1-násobný kořen polynomu

$$\frac{f}{D(f, f')} \in \mathbb{C}[x].$$

Důsledek $f \in \mathbb{C}[x]$.

1) Množina všech kořenů polynomu $\frac{f}{D(f,f')}$ je rovna množině všech kořenů polynomu f.

2) Všechny kořeny polynomu $\frac{f}{D(f,f')}$ jsou 1-násobné.

Viètovy vzorce $f = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$

$\xi_1, \ldots, \xi_n$ jeho kořeny. Pak

$$a_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

$$\vdots$$

$$a_0 = (-1)^n \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \ldots \cdot \xi_n.$$

Př. $x^2 - 5x + 6$

$\xi = a + bi \in \mathbb{C}$ $\quad \xi^* = a - bi$ komplexně sdružené

POLOGRUPY, MONOIDY, GRUPY

Binární operace

A … množina

BINÁRNÍ OPERACE na množině A je zobrazení $A \times A \to A$. | $* : A\times A \to A$, $*(a,b) = a*b$

Binární operace $*$ na množině A je ASOCIATIVNÍ, jestliže $\forall a,b,c \in A$ platí $a*(b*c) = (a*b)*c$.

Binární operace $*$ na A je KOMUTATIVNÍ, jestliže $\forall a,b \in A$ platí $a*b = b*a$.

Pologrupa

Dvojice $(A,*)$ je POLOGRUPA, jestliže A je množina a $*$ je asociativní binární operace na A.

Pologrupa $(A,*)$ se nazývá KOMUTATIVNÍ, jestliže $*$ je komutativní.

MONOIDY

Buď $*$ binární operace na A. Prvek $e \in A$ se nazývá NEUTRÁLNÍ PRVEK vzhledem k operaci $*$, jestliže $\forall a \in A$ platí $a*e = a = e*a$.

Tvrzení V množině A s operací $*$ existuje nejvýše jeden neutrální prvek.

Důkaz e', e'' neutr. prvky

$$e' = e' * e'' = e''.$$

MONOID $(A,*,e)$ je pologrupa $(A,*)$ s neutr. prvkem e. Monoid se nazývá KOMUTATIVNÍ, jestliže příslušná pologrupa je komutativní.